

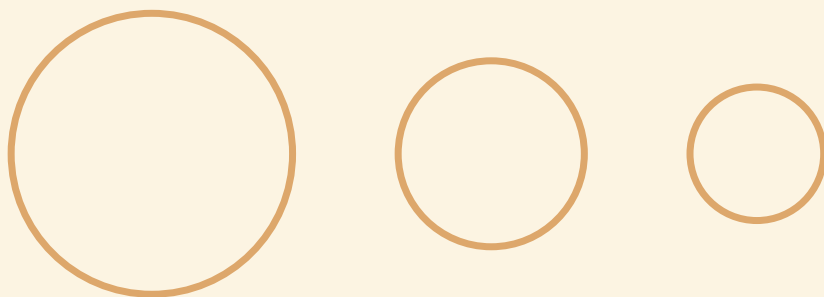


# วิทยาศาสตร์ 2022



๕๕ ปี คณะวิทยาศาสตร์  
มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

## Calculus แคลคูลัส



รศ.ดร.เอธวัฒน์ คำมณี  
สาขาวิชาวิทยาศาสตร์การคำนวณ  
คณะวิทยาศาสตร์  
มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

# Calculus

## Limit and Continuity

1. ค่าของ  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(5+h)^4 - 5^4}{h}$

2. จงหาค่า  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|1+x-2x^2|}{\sqrt{x+3}-2}$

3. กำหนดให้  $f(x) = x + 1$  และ  $g \circ f(x) = x^2 + 2x - 1$  และ

$$s(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(g(x+h))^2 - (g(x))^2}{h}$$

จงหา  $(sg)(1)$

4. กำหนดให้  $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-8}{2x - \sqrt{4x^2 - 3x + 12}}, & x < 4 \\ \frac{kx}{3}, & x \geq 4 \end{cases}$  จงหาค่า  $k$  ที่ทำให้  $f$  ต่อเนื่องที่  $x = 4$

5. ให้  $a, b \in \mathbb{R}$  และให้  $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x < 2 \\ \sqrt{x-1}, & 2 \leq x \leq 5 \\ ax + b, & x > 5 \end{cases}$  ถ้า  $f$  เป็นฟังก์ชัน ต่อเนื่อง จงหา  $a + b$

6. จงหาค่า  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cot^3 x - 1) \csc^2 x}{1 + \cos 2x - 2 \sin^2 x}$

7. จงหาค่า  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x+8} + \sqrt[3]{x-8}}$

8. จงหาค่า  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^3 + x^2} + x}{x^2}$

9. กำหนดให้  $g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}, & x > 1 \\ \frac{f(x)}{|x|+7} & x \leq 1 \end{cases}$  ถ้า  $g$  มีความต่อเนื่องที่  $x = 1$  จงหา  $g \circ f(1)$

10. ให้  $f$  และ  $g$  เป็นฟังก์ชันซึ่ง  $f(0) = f(1) = 0$  และ  $g(0) = g(1) = 1$  ถ้า  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$  และ  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-1}{x} = 2$  จงหา  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(g(x))}{x}$  มีค่าเท่ากับเท่าใด

11. ฟังก์ชัน  $f(x)$  ในข้อใดทำให้  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$  และ  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$

(a)  $2\left|\frac{1-x^2}{1-x}\right|$

(b)  $2\left(\frac{1-x^2}{|1-x|}\right)$

(c)  $1 + \frac{1-x^2}{|1-x|}$

(d)  $3 - \frac{|1-x^2|}{1-x}$

12. ให้  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} & x \geq 2 \\ \frac{3 - x}{3 - x} & x < 2 \end{cases}$  จงหาค่า  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

13. ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันที่มีกราฟผ่านจุดกำเนิดโดยที่  $f'(0) = \frac{1}{4}$  และ  $g$  เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & x < 0 \\ a & x = 0 \\ \frac{b}{\sqrt{x+4}} & x > 0 \end{cases}$$

ถ้า  $g$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 0$  แล้ว  $a + b$  มีค่าเท่าไร

14. กำหนดให้  $f(x) = \frac{2x}{2x+1}$  และสำหรับจำนวนเต็มบวก  $n$  ใด ๆ ให้  $f^n(x) = (f \circ f \circ \dots \circ f)(x)$  จงหาค่าของ  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(1)$  เท่ากับเท่าไร

15. ถ้า  $a_n$  เป็นลำดับของจำนวนจริงบวกซึ่ง  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  หาค่าได้ และ  $a_n = \sqrt{\frac{1+2n}{n} + a_n}$  แล้ว  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  เท่าใด

16. ถ้า  $f(x)$  เป็นฟังก์ชันซึ่งเส้นตรง  $2y = 3x + 2$  สัมผัสกราฟของ  $y = f(x)$  ที่จุด  $(0, 1)$  แล้ว  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$  มีค่าเท่าไร

17. ถ้า  $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)$  แล้วค่าของ  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(f(x))}{f(x)}$  มีค่าเท่ากับเท่าไร

18. ฟังก์ชัน  $f$  ในข้อใด มีฟังก์ชัน  $g$  ที่ต่อเนื่องบนช่วง  $(-\infty, \infty)$  และ  $g(x) = f(x)$  สำหรับทุกจำนวนจริง  $x \neq 2$

(a)  $f(x) = \frac{x^2 + 2}{|x - 2|}$

(b)  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x - 2|}$

(c)  $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{|x - 2|}$

(d)  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{|x - 2|}$

(e)  $f(x) = \frac{|x - 2|}{x^2 - 4x + 4}$

## Derivative

19. กำหนดให้  $P(x)$  เป็นพหุนาม โดยที่  $P(0) = 1$  และสอดคล้อง

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3hx + 2h}{P(x+h+2) + P(h+2) - P(x+2) - P(2)} = 1$$

จงหา  $P(12)$



20. กำหนดให้  $f(3) = 111$  และ  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{xf(x) - 333}{x - 3} = 2013$  จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ  $f(x)$  เทียบกับ  $x$  ที่  $x = 3$

21. ให้  $a, b \in \mathbb{R}$  และ  $f(x) = ax + \frac{b}{x}$  เมื่อ  $x \neq 0$  โดยที่  $y = f(x)$  เป็นเส้นโค้งที่สัมผัสกับ  $y = 1$  ที่จุด  $(1, 1)$  จงหา

(a) จงหาค่าสูงสุดและต่ำสุดของ  $f$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 1} f \circ f(x)$

22. กำหนดให้  $f(x) = \frac{4x^3}{x^6 - 3x^3 + 64}$  จงหาช่วงที่ทำให้  $f$  เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

23. กำหนดให้  $f(x) = \frac{ax + 1}{x^2 + 1}$  เมื่อ  $a \in \mathbb{R}$  และ  $g(x) = (x^2 + 1)f'(x)$  และ

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 2 \\ g(x), & x < 2 \end{cases}$$

ถ้า  $h$  ต่อเนื่องที่  $x = 2$  จงหา  $2h(-2) - h(2)$

24. กำหนดให้  $h(x) = x^2 + 4$ ,  $g(x) = h(f(x) - 1)$  และ  $f'(1) = g'(1) = 1$  จงหา  $f(1)$

25. กำหนดให้  $g(x) = x^2 - 2x + 5$  และ  $g \circ f(x) = x^6 + 2x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 5$  และ  $f(0) = 0$  จงหาค่า  $f' \circ g'(1) + g' \circ f'(0)$

26. ให้  $g(x) = \sqrt{f(x) - 1}$  ถ้า  $g(0) = f(0) - 3$  และ  $g'(0) = \frac{1}{3}$  แล้ว  $f'(0)$  มีค่าเท่าไร

27. ถ้า  $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$  มีรากต่างกัน 3 รากโดยที่กราฟของ  $f$  ตัดแกน  $y$  ที่  $y = 1$  และตัดแกน  $x$  ที่  $x = -1$  เท่านั้น แล้วค่าของ  $A$  ทั้งหมดอยู่ในช่วงใด

28. ถ้า  $f(x) = x|x|$  จงหา  $f'(x)$

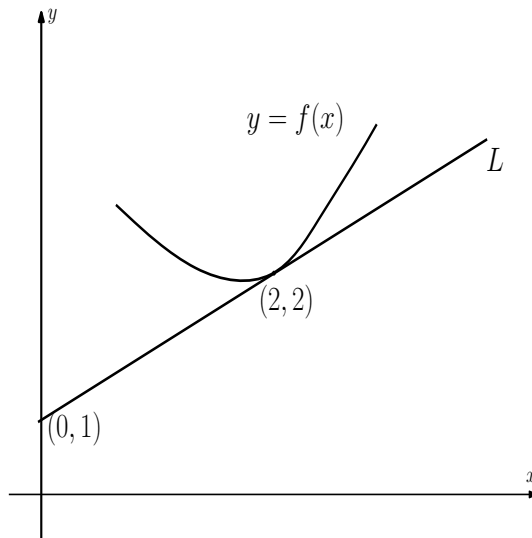
29. ให้  $f(x)$  เป็นพหุนามดีกรีสาม มีจุดสูงสุดสัมพัทธ์ที่  $(1, 5)$  และมีจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ที่  $x = 2$  ถ้า  $f(0) = 0$  แล้ว  $f(2)$  เท่ากับ

30. ระยะทางสั้นที่สุดจากจุด  $(3, 0)$  ไปยังจุดบนพาราโบลา  $y = x^2$  คือเท่าไร

31. กราฟของ  $y = 4x^{3/2} - 9x^{2/3} + 6$  บริเวณจุด  $(1, 1)$  มีลักษณะตรงกับข้อใด

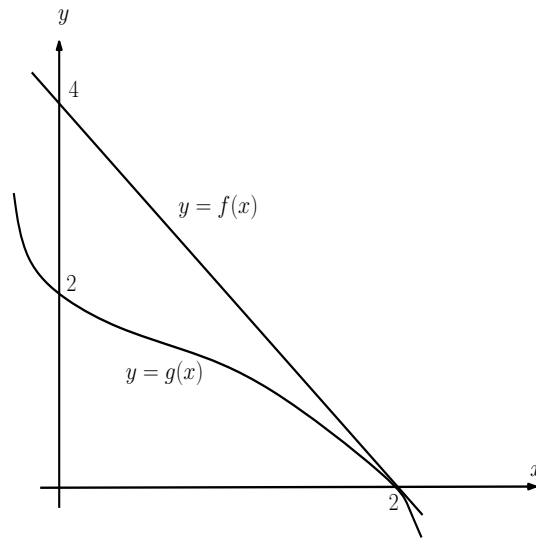
32. วงกลมที่มีรัศมี 5 หน่วย สัมผัสกับพาราโบลา  $y = \frac{x^2}{4}$  โดยมีจุด  $(0, a)$  เป็นจุดต่ำสุดของวงกลม ค่าของ  $a$  เท่ากับเท่าใด

33. ให้  $L$  เป็นเส้นสัมผัสเส้นกราฟของ  $y = f(x)$  ที่จุด  $(2, 2)$  ดังรูป ถ้า  $g(x) = f(f(x))$  แล้ว  $g'(2)$  มีค่าเท่าไร



34. ถ้า  $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + 1}$  แล้ว  $f'(3)$  มีค่าเท่าใด

35. กำหนดให้  $h = f \circ g$  และ  $y = f(x)$  เป็นเส้นโค้งสัมผัสเส้นโค้ง  $y = g(x)$  ที่จุด  $(2, 0)$  ดังรูป  
จงหาค่า  $h'(2)$



36. ให้  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3, & x \leq 2 \\ x^3 - a, & x > 2 \end{cases}$  โดยที่  $a$  เป็นค่าคงตัว ถ้า  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $(-\infty, \infty)$  แล้ว  $f'(1)$  มีค่าเท่าใด

37. ถ้า  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่  $x = -2$  และมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่  $x = 4$  แล้ว  $a - b$  มีค่าเท่าไร

38. กำหนดให้  $f(x) = x^3 + 3ax^2 - 9a^2x + 5a$  เมื่อ  $a$  เป็นจำนวนจริงบวก ถ้า  $f$  มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ 0 แล้ว  $a$  มีค่าเท่าไร

39. ให้  $f$  และ  $g$  เป็นฟังก์ชันใด ๆ ที่ไม่ใช่ฟังก์ชันศูนย์ และ  $f \neq g$  ถ้า  $f'(x) = g(x)$  และ  $g'(x) = f(x)$  สำหรับทุกจำนวนจริง  $x$  แล้วฟังก์ชันในข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน ค่าคงตัวเสมอ

(a)  $fg$

(b)  $\frac{f}{g}$

(c)  $f - g$

(d)  $f^2 - g^2$

(e)  $f^2 + g^2$

## Integration

40. จงหาค่าของ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \left(\frac{1}{n}\right)^9 + \left(\frac{2}{n}\right)^9 + \dots + \left(\frac{2n}{n}\right)^9 \right]$



41. ค่าของ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n [4(1 + \frac{i}{n}) - (1 + \frac{i}{n})^3]$  เท่ากับเท่าใด

42. กำหนดให้  $f \circ g(x) = \sqrt{x^2 + 5}$  และ  $\int g(x) dx = x^2 - 4x + C$  จงหาสมการเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง  $y = f(x)$  ณ  $x = 0$

43. กำหนดให้  $f(x) = 4x^3 + bx^2 + cx + d$  เมื่อ  $b, c, d \in \mathbb{R}$  โดยที่  $\int_{-2}^2 f(x) dx = -\frac{64}{3}$  ถ้า  $g(x)$  เป็นพหุนามซึ่ง  $g'(x) = f(x)$  และ  $g'(1) = g'(0) = g(0) = 0$  จงหา  $g''(x) = g'(x) + g(x)$

44. กำหนดให้  $f(2x - 1) = 4x^2 - 10x + a$  เมื่อ  $a \in \mathbb{R}$  และ  $f(0) = 12$  จงหาค่า  $\int_1^4 f(x)dx$

45. กำหนดให้  $a, b \in \mathbb{R}$  และ  $f(x) = a + bx + x^2$  ถ้าเส้นตรง  $5x - y + 13 = 0$  สัมผัสกับเส้นโค้ง  $y = f(x)$  ที่  $x = 1$  จงหา  $\int_0^2 f(x)dx$

46. ถ้า  $\int_{-2}^2 |x^2 - 7x + 6|dx = \frac{a}{b}$  โดยที่  $(a, b) = 1$  จงหา  $a + b$

47. กำหนดให้  $f(x) = x^2 + ax + b$  เมื่อ  $a, b \in \mathbb{R}$  ถ้า  $f(1) = 2$  และ  $f \circ f(0) = 10$   
จงหา  $\int_{-1}^2 f(x)dx$

48. กำหนดให้  $f'(x) = ax^3 + bx$  เมื่อ  $a, b \in \mathbb{R}$  และ  $g(x) = (x^3 + 2x)f(x)$  ถ้า  
 $f'(1) = 18, f''(0) = 6$  และ  $f(2) = f(1) + f(0)$  จงหาค่า  $g'(-1)$

49. กำหนดให้  $f(x) = \begin{cases} 4x + a, & -3 \leq x < 0 \\ \sqrt{1-x^2} & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$  ถ้า  $\int_{-3}^1 f(x)dx = \frac{\pi}{4}$  แล้ว  $a$  มีค่า  
เท่าไร

50. กำหนดให้  $f(x)$  เป็นพหุนามกำลังสอง โดยที่  $f(0) = 1$  และ  $f(x+1) = f(x-1) + x+1$  จงหา  $\int_{-2}^1 f(x)dx$

51. กำหนดให้  $P(x^2 + 3) = 3x^4 + 24x^2 + 40$  และ  $f(x) = \int_0^x P(t)dt$  จงหาค่า  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{P(x) - f(x)}$

52. กำหนดให้  $f(x) = x^3 + ax + b$  เมื่อ  $a, b \in \mathbb{R}$  ที่แตกต่างกัน และให้  $L_1$  และ  $L_2$  เป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่  $x = a$  และ  $x = b$  ตามลำดับ ถ้า  $L_1$  ขนานกับ  $L_2$  และ  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{9h}{f(1+h) - f(1)} = 1$  จงหาค่า  $\int_0^2 f(x)dx$

53. กำหนดให้  $f''(x) = 0$  ถ้า  $f(0) = 23$  และ  $f(1) = 23$  จงหา  $\int_0^1 f(x)dx$

54. กำหนดให้  $y = f(x)$  สัมผัสกับเส้นตรง  $2x - y + 3 = 0$  ที่จุด  $(0, 3)$  และ  $\int_0^2 f''(x)dx = -3$  ถ้า  $g(x) = \sqrt{x+2}f(x)$  และ  $g'(2) = 0$  จงหา  $f(2)$

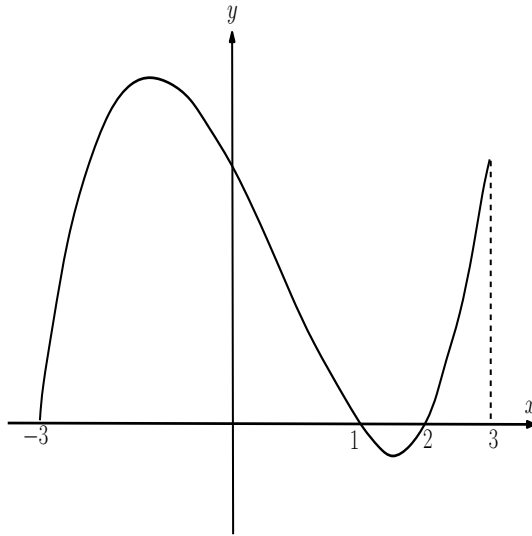
55. จงหาค่าของ  $a$  ที่ทำให้  $\int_a^{a+1} (2011x - x^2)dx$  มีค่ามากที่สุด

56. จงหาค่าของ  $\int_0^1 (1 - \sqrt{1 - (1 - x)^2}) dx$

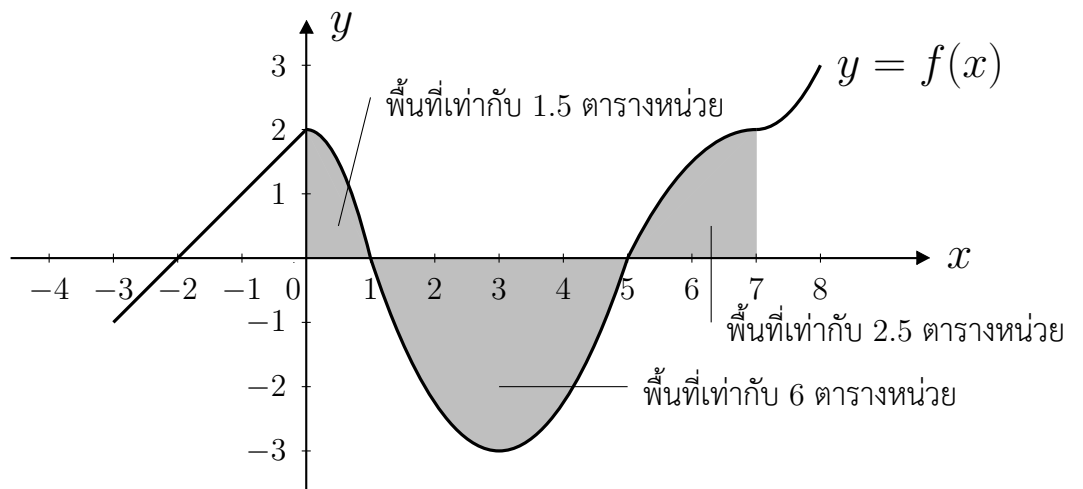
57. ถ้า  $\int f(x) dx = \frac{1}{x^2} + C$  เมื่อ  $C$  เป็นค่าคงตัวใด ๆ แล้ว  $\int_1^2 f'(x) dx$  มีค่าเท่าใด

58. ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันซึ่งมีกราฟดังรูป

ถ้า  $-3 \leq a \leq b \leq 3$  แล้ว ค่าของ  $a + b$  ที่ทำให้  $\int_a^b f(x) dx$  มีค่าน้อยที่สุด เท่าใด



59. กำหนดให้ฟังก์ชัน  $f$  มีกราฟดังรูป



จงหาค่าของ  $\int_0^7 f(x-2) dx$

60. ถ้า  $f(x) = \begin{cases} 3 - 3x^2, & x < 1 \\ -\sqrt{4 - (x - 3)^2}, & 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$  จงหาค่าของ  $\int_0^3 f(x) dx$

61. เส้นโค้งปกติมีลักษณะเป็นรูปประฆัง และมีสมการของเส้นโค้งนี้คือ

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

โดยที่  $\mu$  แทนค่าเฉลี่ยเลขคณิตของประชากร และ  $\sigma$  แทนส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร

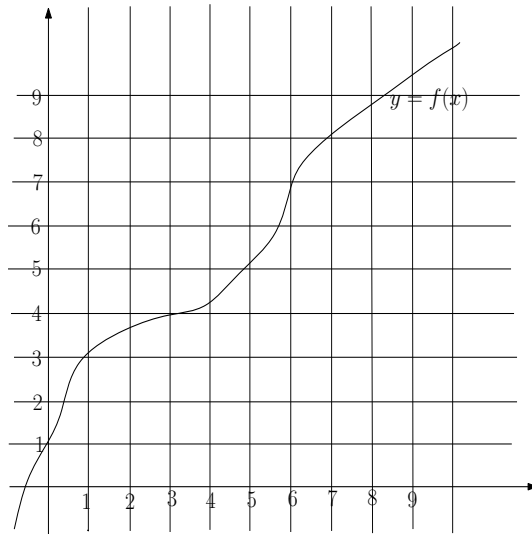
กำหนดพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐานระหว่าง 0 และ  $z$  ดังนี้

$z$	0.71	1.00	1.41	2.00
พื้นที่	0.2611	0.3411	0.4207	0.4772

จงหาค่าของ  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{2}} e^{-x^2} dx$



62. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน  $f(x)$  ดังรูป



ถ้า  $\int_3^6 f(x)dx = 14.14$  จงหาค่า  $\int_4^7 f^{-1}(x)dx$