

ตัวแปรสุ่ม (Random Variables)

การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

ตัวอย่าง 1. จากการสำรวจจำนวนพี่น้องของนักเรียนระดับชั้น ม.5 ห้องหนึ่ง จำนวน 50 คน พบว่า

จำนวนพี่น้อง	ความถี่
0	6
1	22
2	17
3	4
4	1

$$P(X=0) = \frac{6}{50} ; P(X=1) = \frac{22}{50} ; P(X=2) = \frac{17}{50} ; P(X=3) = \frac{4}{50}$$

$$P(X=4) = \frac{1}{50}$$

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{i=1}^n X_i P(X=X_i) = 0 \cdot \frac{6}{50} + 1 \cdot \frac{22}{50} + 2 \cdot \frac{17}{50} + 3 \cdot \frac{4}{50} + 4 \cdot \frac{1}{50} \\ &= \frac{22+34+12+4}{50} = \frac{72}{50} \approx 1. \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2. ให้ตัวแปรสุ่ม X คือจำนวนครั้งที่เหรียญขึ้นก้อย จากการโยนเหรียญที่เที่ยงตรง 1 เหรียญ จำนวน 3 ครั้ง จงเขียนแสดงการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X

ตัวอย่าง 3. หากทราบว่าในบรรดาชิ้นส่วน 800 ชิ้น และมีสินค้าไม่ได้มาตรฐานจำนวน 50 ชิ้น ถ้าสุ่มหยิบชิ้นส่วน 2 ชิ้นแบบไม่ใส่กลับคืน และให้ X คือจำนวนชิ้นส่วนที่ไม่ได้มาตรฐานที่สุ่มได้ จงแสดงการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม x

$$P(X=0) = \frac{\binom{750}{1} \binom{749}{1}}{\binom{800}{1} \binom{799}{1}}$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{750}{1} \binom{50}{1} + \binom{50}{1} \binom{750}{1}}{\binom{800}{1} \binom{799}{1}}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{50}{1} \binom{49}{1}}{\binom{800}{1} \binom{799}{1}}$$

ค่าเฉลี่ย

บทนิยาม 1. ค่าความคาดหวัง (expected value) ของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง X เขียนแทนด้วย μ_X นิยามโดย

$$\mu_X = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$$

บทนิยาม 2. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง X เขียนแทนด้วย σ_X นิยามโดย

$$\sigma_X = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2 P(X = x_i)}$$

และเรียก σ_X^2 ว่าความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง X

ตัวอย่าง 4. จงหา μ_X และ σ_X^2 ในตัวอย่างที่ 1 และ 2

ตัวอย่าง 5. ถ้านายเอชวนนายบีเล่นโยนเหรียญ 2 อัน 1 ครั้ง โดยถ้านายบีทายว่าออกหัว (หัว 2 อัน) และทายถูกนายเอจะจ่ายเงินให้ 2 เท่า แต่ถ้านายบีทายว่าออกกลาง (หัว 1 อัน ก้อย 1 อัน) และทายถูก นายเอจะจ่ายเงินให้ 1 เท่า ถ้านายบีทายว่าออกก้อย (ก้อย 2 อัน) และทายถูก นายเอจะจ่ายเงินให้ 2 เท่า แต่ถ้านายบีทายไม่ถูก นายเอจะรับเงินจากนายบี เมื่อโยนเหรียญถ้านายบีทายว่าออกหัว ~~ออกหัว~~ 0.5 ก.ก.บ. โดยใช้เงิน 10 บาท จงหาค่าคาดหวังของเงินกำไรที่นายบีจะได้รับจากนายเอ

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 10 & -10 & -10 & -10 \end{array}$$

$$P(X=10) = \frac{1}{4} ; P(X=-10) = \frac{3}{4}$$

$$\mu = 10 \cdot \frac{1}{4} + (-10) \cdot \frac{3}{4} = \frac{10 - 30}{4} = \frac{-20}{4} = -5$$

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ -10 & 0 & 0 & -10 \end{array}$$

$$\mu = 0 \cdot \frac{2}{4} + (-10) \left(\frac{2}{4} \right) = -\frac{20}{4} = (-5)$$

ตัวอย่าง 6. ในงานประจำปีของโรงเรียนแสงทองวิทยามีเกมส์หยิบฉลากตั้งแต่หมายเลข 1 - 7 ถ้าผู้เล่นหยิบฉลากได้เป็นเลขคู่ ผู้เล่นจะได้เงินรางวัล 20 บาท ในการเล่นทุกครั้งผู้เล่นต้องเสียเงินจ่ายค่าเล่นครั้งละ 10 บาท จงหาค่าคาดหวังของจำนวนเงินที่ผู้เล่นจะได้รับหรือเสียไป \rightarrow ก.ก.บ.

$$\{1, 2, \dots, 7\}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \dots \\ 10 & -10 & \dots \end{array}$$

$$P(X=10) = \frac{4}{7} ; P(X=-10) = \frac{3}{7}$$

$$\therefore \mu = 10 \cdot \frac{4}{7} + (-10) \left(\frac{3}{7} \right) = \frac{10}{7}$$

ตัวอย่าง 9. ในการส่งรหัสลับต้องส่งครั้งละ 4 ตัวอักษร เราพบว่าในการส่งแต่ละตัวอักษรมีโอกาสผิดพลาด 0.1 จงหาค่าเฉลี่ยของจำนวนตัวอักษรที่ส่งผิดพลาด

การแจกแจงเอกรูปไม่ต่อเนื่อง (Discrete Uniform Distribution)

บทนิยาม 3. ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X เป็นการแจกแจงเอกรูปไม่ต่อเนื่อง เมื่อ

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n} \quad \text{สำหรับ } i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

ตัวอย่าง 10. นายเอสุ่มหยิบสลาก 1 ใบ จากกล่องที่บรรจุสลาก 4 ใบ แต่ละใบระบุจำนวนเงินรางวัลแตกต่างกัน 20, 50, 100 และ 500 บาท ให้ตัวแปรสุ่ม X คือจำนวนเงินรางวัลที่นายเอจะได้รับ จงหาค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม X เป็นเท่าไร และถ้านายเอต้องจ่ายเงินซื้อตั๋วราคา 150 เพื่อหยิบฉลาก 1 ใบ จงพิจารณาว่าถ้านายเอสุ่มหยิบสลากหลาย ๆ ครั้ง โดยเฉลี่ยแล้วนายเอจะได้เปรียบหรือเสียเปรียบ

สำนวน 1: สำเนา

การแจกแจงทวินาม (Binomial Distribution)

บทนิยาม 4. การแจกแจงทวินามคือการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ซึ่งคือจำนวนครั้งของการเกิดผลสำเร็จในการทดลองสุ่ม n ครั้งโดยที่แต่ละครั้งมีโอกาสสำเร็จด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ p และไม่สำเร็จด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ $1 - p$

๖๐๓ สำเนา

$$X \sim B(n, p)$$

- เรียก n และ p ว่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงทวินาม และเขียนสัญลักษณ์ $X \sim B(n, p)$
- การทดลองสุ่ม 1 ที่มีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ 2 แบบคือสำเร็จหรือไม่สำเร็จ เรียกว่า การทดลองแบร์นูลลี (Bernoulli trial)

ทฤษฎีบท 1. ถ้าการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X เป็นการแจกแจงทวินามจะได้ว่า

$$1. P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \text{ สำหรับทุก } x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

$$2. \mu_X = np$$

$$3. \sigma_X = \sqrt{np(1-p)}$$

A → ดูไว้ ๖๐ ๓๖ ⇒ ทาย ๐.๖

ไม่ทง ๐.๔ = 1 - ๐.๖

ตัวอย่าง 11. กำหนดให้ $X \sim B(6, 0.4)$

$$P(X = 4) = \binom{6}{4} (0.4)^4 (0.6)^2$$

$$1. P(X = 2) = \binom{6}{2} (0.4)^2 (0.6)^4$$

$$2. P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$3. P(X > 4) = P(X = 5) + P(X = 6)$$

$$4. P(2 \leq X \leq 5) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

$$p = \frac{1}{6}$$

ตัวอย่าง 12. ให้ตัวแปรสุ่ม X คือจำนวนครั้งที่ลูกเต๋ารั้งขึ้นแต้ม 5 จากการทอดลูกเต๋าคู่ 1 ลูก 7 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋ารั้งขึ้นแต้ม 5 เป็นจำนวน 4 ครั้ง นอกจากนั้นจงหาค่าความคาดหวังและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม X

$$P(X=4) = \binom{7}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$\mu = np = 7 \cdot \frac{1}{6}$$

ตัวอย่าง 13. ในการรักษาโรคมะเร็งด้วยสมุนไพรพบว่าเมื่อผู้ป่วยรับประทานสมุนไพรชนิดนี้ต่อเนื่อง ความน่าจะเป็นที่ผู้ป่วยแต่ละคนจะหายจากโรคมะเร็งเป็น 0.7 ถ้านักวิจัยสุ่มผู้ป่วยโรคมะเร็งที่รับประทานสมุนไพรจำนวน 10 คน $\sim B(10, 0.7)$

1. จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้ป่วยหายจากโรคมะเร็งอย่างน้อย 1 คน $P(X \geq 1) = P(X=7) + P(X=8) + P(X=9) + P(X=10)$
2. จงหาค่าความคาดหวังและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของจำนวนผู้ป่วยที่หายจากโรคมะเร็ง

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X=0)$$

ตัวอย่าง 14. ในการโยนเหรียญที่ไม่เที่ยงตรงเหรียญหนึ่ง พบว่าความน่าจะเป็นที่เหรียญขึ้นก้อยในการโยนแต่ละครั้งเท่ากับ 0.6 ให้ตัวแปรสุ่ม X คือจำนวนครั้งที่เหรียญขึ้นหัว จากการโยนเหรียญนี้จำนวน 6 ครั้ง

1. จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญขึ้นก้อยน้อยกว่า 3 ครั้ง
2. โดยเฉลี่ยแล้วเหรียญจะขึ้นหัวกี่ครั้ง
3. จงหาความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม X

ตัวอย่าง 15. ความน่าจะเป็นที่นายเอจะซื้อขนมไข่มุกในแต่ละวันเท่ากับ 0.3 จงหาความน่าจะเป็นที่นายเอจะซื้อขนมไข่มุกไม่เกิน 2 วันในหนึ่งสัปดาห์